

Редуцирование ограничений в задаче оптимального потокораспределения

Общая нелинейная система

$$\bar{S} = \bar{S}^P - \bar{S}^G - \bar{F}(x) = 0, \quad x = (\delta, V)$$

(система уравнений УР, включая балансирующий узел)
 $\bar{S} \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad \bar{F}: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N+2}$

Выделим ур-е баланса активной мощности в балансирующем узле

$$(*) \quad \begin{cases} s - F(x) = 0 \\ p_0 - F_0(x) = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}^{2N}, \quad F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

ур-е баланса реактивной мощности в б.у.
отбрасываем

$p - F_p(x) = 0$: баланс активной мощности
из (*).

$$p_0 + e^T p - F_0(x) - e^T F_p(x) = 0$$

$\sum_{i=0}^N p_i + \ell(x) = 0$, $\ell(x)$ - функция
потерь. (сумма потерь активной м.т.и по
ветвям сети - ем. введение в ТОЭ)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} s - F(x) = 0 \\ \sum_{i=0}^N p_i + \ell(x) = 0 \end{cases}$$

$$\leq \quad x = x(s) \quad s \equiv F(x(s))$$

$$E = DF \frac{dx}{ds} ; \quad \frac{dx}{ds} = DF^{-1}$$

$$\ell(x) = \ell(x(s))$$

$$\nabla_s \ell(x(s)) = \nabla_x^T \ell \frac{dx}{ds} = \nabla_x^T \ell DF^{-1}$$

Из узловых нагрузок s только небольшая часть меняется в ходе оптимизации (активная мощность в узлах генерации)

$$x(s) = x(p)$$

Ограничения на переток:

$$f(x) \leq \bar{f}, \quad f(x(p)) \leq \bar{f}$$

$$\nabla_p f(x(p)) = \nabla_x^T f(x(p)) DF^{-1}$$

ОПФ в редуцированной форме

$$\max c(p)$$

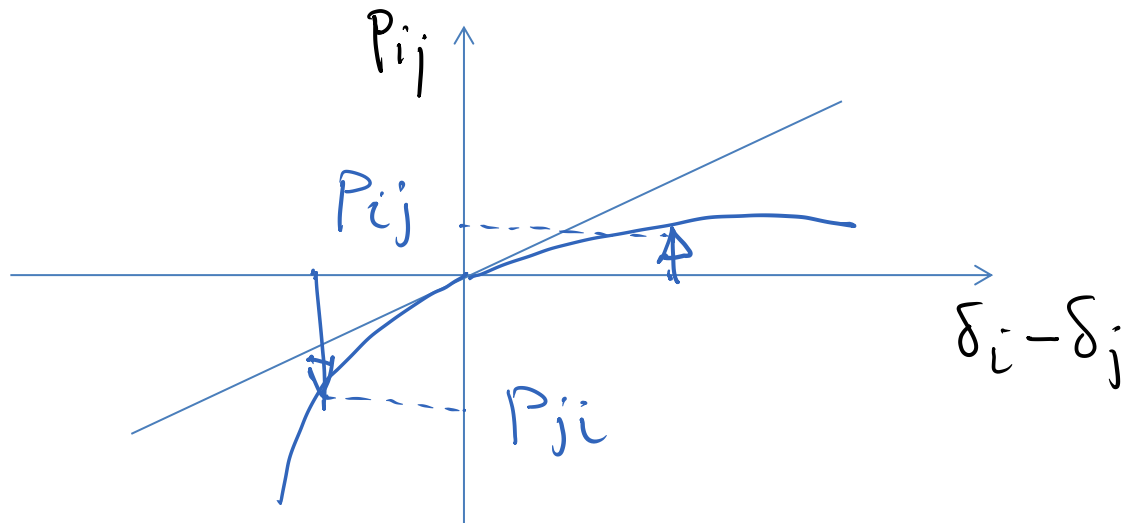
$$e^T p + \ell(x(p)) = 0$$

$$f(x(p)) \leq \bar{f}$$

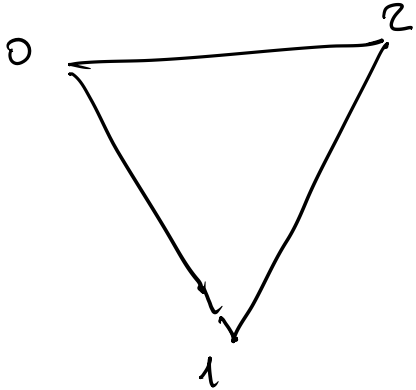
$$p \in P$$

Упрощенная модель OPF с учетом потерь

$$P_{ij} = g_{ij} V_i V_j (\delta_i - \delta_j) - g_{ij} V_o^2 + b_{ij} V_i V_j \sin(\delta_i - \delta_j)$$
$$\approx \left\{ \delta_i - \delta_j - \text{мало}, V_i \approx V_j \approx 1 \right\}$$
$$\approx b_{ij} (\delta_i - \delta_j) - \frac{g_{ij}}{2} (\delta_i - \delta_j)^2$$



Пример (продолжение)



$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



исключаем ур-е в сбалансированном
узле и $\delta_0 := 0$



$$B_r = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ур-е баланса примет вид

$$p = B_r \delta + Z(\delta), \quad Z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{квадратичная вектор-ф.я}$$

Из ур-я баланса выпишем $\frac{d\delta}{dr}$ (якобиан
независимой функции $\delta = \delta(r)$) в окрестности
точки $\delta = 0, r = 0$ ("flat start")

Якобиан системы ур-я баланса в
данной точке имеет вид:

$$\frac{dr}{d\delta} = B_r, \quad DZ(\delta) = 0, \text{ т.к. } Z(\delta) - \text{квадратичн. по } \delta$$

$$\frac{d\delta}{dr} = B_r^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Градиент ф.и потерь:

$$\nabla_p^T \ell(\delta(p)) = \nabla_\delta^T \ell(\delta) B_r^{-1} = 0, \text{ т.к. } \nabla_\delta^T \ell(\delta) = 0 \\ \text{в т. } \delta = 0$$

Зр-т ф.и перетока по ветви:

$$\nabla_p^T P_{ij}(\delta(p)) = \nabla_\delta^T P_{ij} B_r^{-1}$$

Пример. $P_{20} = \delta_2 - \delta_0 = \delta_2$

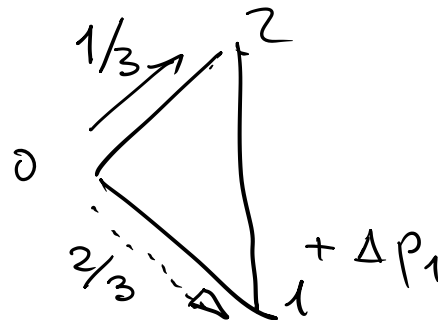
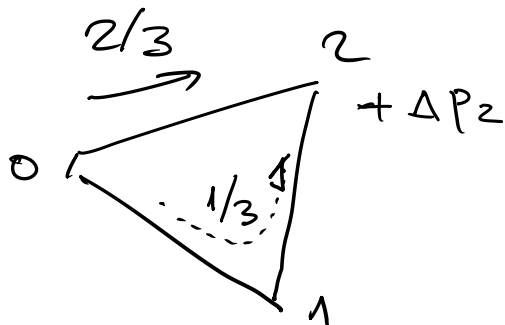
$$\nabla_\delta P_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_p^T P_{20} = [0, 1] \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [1/3 \quad 2/3]$$

$$\frac{\partial P_{20}}{\partial P_1} = 1/3 \quad \frac{\partial P_{20}}{\partial P_2} = 2/3$$

Интерпретация: $\Delta P_1 = 1 \text{ МВт} \Rightarrow \Delta P_{20} = 1/3 \text{ МВт}$
 (при приросте нагрузки в каком-либо узле
 компенсация, устранивающая дисбаланс,
 происходит в балансирующем узле)

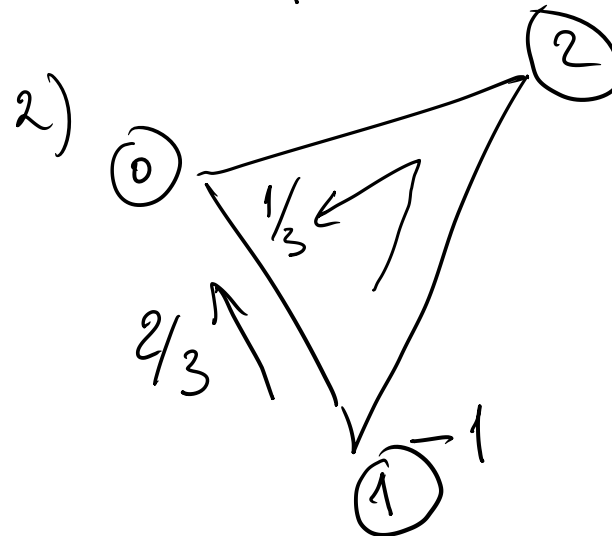
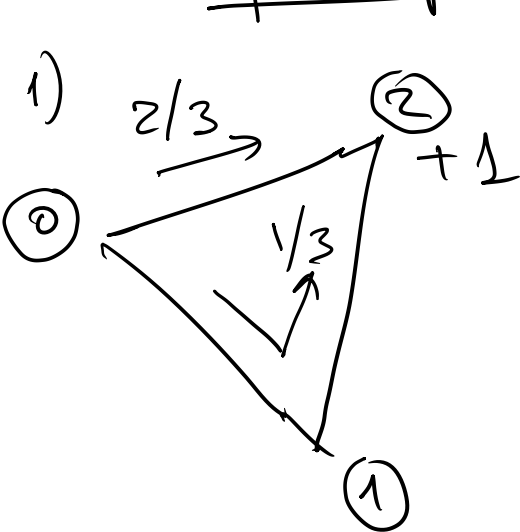
$$\Delta P_2 = 1 \text{ МВт} \Rightarrow \Delta P_{20} = 2/3 \text{ МВт}$$



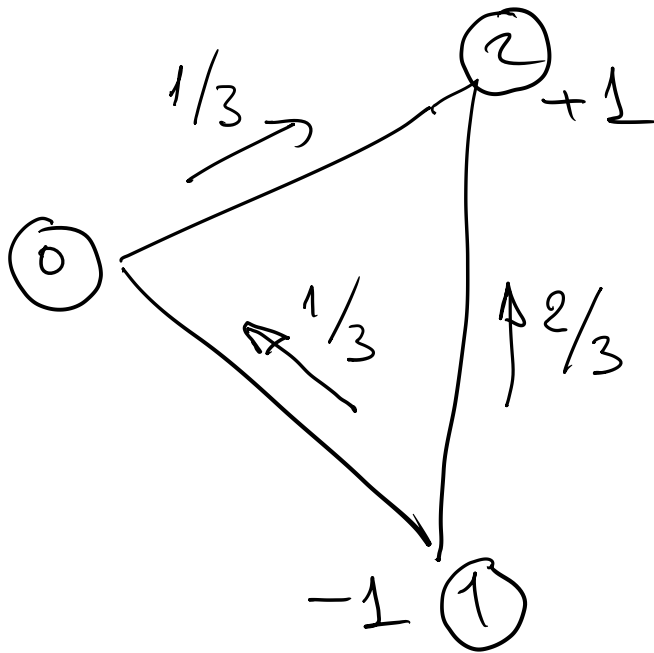
Таким образом:

- 1) Частные производные потоков мощности по узловым нагрузкам зависят от выбора балансирующего узла, но при этом
- 2) Рассматривая произвольные взаимно компенсирующие транзакции в парах узлов, можем получить соответствующее потокораспределение как суперпозицию потокораспределений для каждого из узлов

Пример. 1) $\Delta P_2^{\uparrow} = 1$ 2) $\Delta P_1^{\uparrow} = 1$



$\Rightarrow$



В симметричной сети потокораспределение
обратно пропорционально сопротивлению

Зная коэффициенты влияния каждого узла на каждую ветвь (производные потока по ветви по узловой нагрузке), можем полностью моделировать потокораспределение в сети (в линейном приближении). Такая матрица называется матрицей сетевых коэффициентов (PTDFs – power transfer distribution factors)

Гессиан функции потерь
по узловым нагрузкам

$$1. \quad \ell_{ij}(\delta) = g_{ij}(\delta_i - \delta_j)^2 = \frac{R}{R^2 + X^2} (\delta_i - \delta_j)^2$$

$$2. \quad p_{ij}(\delta) = b_{ij}(\delta_i - \delta_j) = \frac{X}{R^2 + X^2} (\delta_i - \delta_j)$$

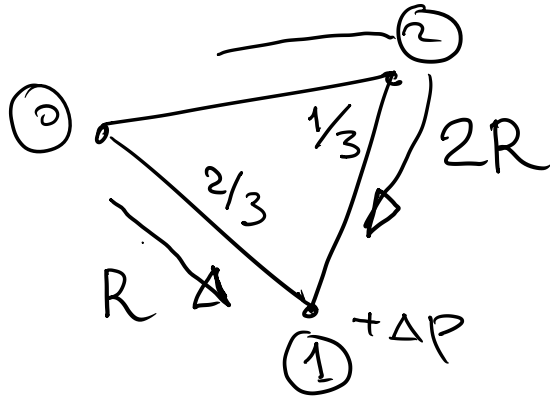
$$3. \quad \delta_i - \delta_j = \frac{R^2 + X^2}{X} p_{ij} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_{ij}(p_{ij}) = \frac{R}{R^2 + X^2} \frac{(R^2 + X^2)^2}{X^2} p_{ij}^2 \simeq \left\{ R \ll X \right\} \simeq \frac{R^2}{X^2} p_{ij}^2$$

$$\nabla^2 \ell(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ where } a_{11} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1^2}$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_2^2} ; \quad a_{21} = a_{12} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1 \partial p_2}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1^2} :$$

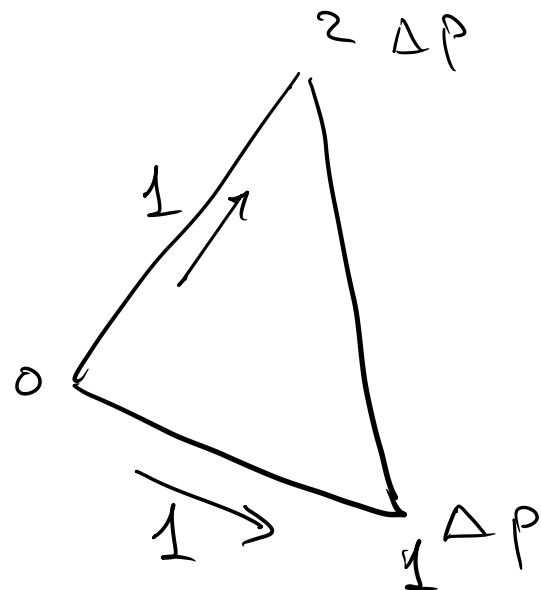
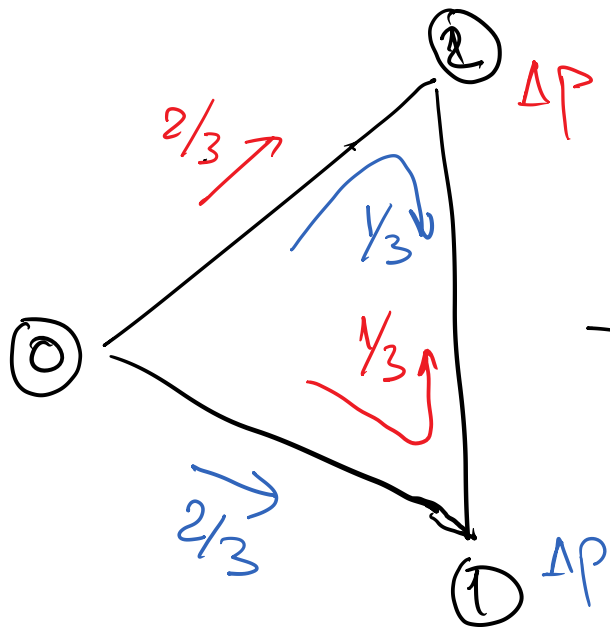


$$\begin{aligned} \Delta \ell_{0 \rightarrow 2 \rightarrow 1} &= 2R \frac{1}{9} \Delta p^2 \\ \Delta \ell_{0 \rightarrow 1} &= R \frac{4}{9} \Delta p^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta \ell_{0 \rightarrow 2 \rightarrow 1} \\ \Delta \ell_{0 \rightarrow 1} \end{aligned}} \right] \rightarrow \Delta \ell = \Delta \ell_{0-2-1} + \Delta \ell_{0-1} =$$

$$= \frac{6}{9} R \Delta p^2 = \frac{2}{3} R \Delta p^2$$

$$\Rightarrow a_{11} = a_{22} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_i^2} = \frac{4}{3} R$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1 \partial p_2}$$



$$\ell_{0-2} = R \Delta p^2$$

$$\ell_{0-1} = R \Delta p^2$$

↓

$$\ell = \ell_{0-2} + \ell_{0-1} = 2R \Delta p^2 =$$

$$= \frac{1}{2} [\Delta p, \Delta p]^T \nabla^2 \ell \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta p \end{bmatrix} = \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \Delta p^2 + \frac{(a_{12} + a_{21})}{2} \Delta p^2 =$$

$$= \frac{4}{3} R \Delta p^2 + a_{12} \Delta p^2 = 2 R \Delta p^2$$

$$a_{12} = \frac{2}{3} R$$

$$\nabla^2 \ell(p) = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} R$$

$$= r \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, r = \frac{2}{3} R$$

$$\text{T.o. } \ell(p) = \ell(0) + \nabla_p^T \ell(0) p + \frac{1}{2} p^T \nabla_p^2 \ell(0) p$$

логич с потерями без ограничений на
передачу

$$\min p_0 + 2p_1$$

$$p_2 - p_0 - p_1 + \ell(p) = 0 \quad (+)$$

$$0 \leq p_0 \leq 10, \quad 0 \leq p_1 \leq 20$$

$$L(p, \lambda) = p_0 + 2p_1 + \lambda(p_2 - p_0 - p_1) + \\ + \lambda r (p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2)$$

$$\frac{1}{2} \lambda r \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$


$$\frac{\partial L}{\partial p_0} = c_0 - \lambda + \pi_0^+ - \cancel{\pi_0^-} = 0$$

$$\partial L = c_1 - \lambda + \lambda r(2p_1 - p_2) + \cancel{\pi_1^+} - \cancel{\pi_1^-} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = -\infty + \lambda + \lambda r(2p_2 - p_1) + \cancel{\pi_2^+} - \cancel{\pi_2^-} = 0$$

$$\text{Цена в узле } 0 = \lambda \quad \perp \lambda$$

$$\text{Цена в узле } 1 = \overbrace{\lambda - \lambda r(2p_1 - p_2)} = 2$$

$$\text{Цена в узле } 2 = \lambda + \lambda r(2p_2 - p_1) > \lambda$$

Вывод: цена отражает стоимость потерь
и возрастает в направлении перетока

Модель с потерями и ограничением на
переток

К задаче (+) добавим ограничение на
переток:

$$p_{20} \leq 11$$



$$-\frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2 \leq 11$$

$\frac{\partial L}{\partial p_0}$ — см. выше анализ (+)

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = c_1 - \lambda + \lambda r(2p_1 - p_2) - \frac{1}{3}G + \pi_1^+ - \pi_1^- = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = -\infty + \lambda + \lambda r(2p_2 - p_1) + \frac{2}{3}G + \pi_2^+ - \pi_2^- = 0$$

Предположим, Γ_0 и Γ_1 - взаимобразующие ($\pi_i^{+/-} = 0$), и ограничение на предок насыщено $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3} P_1 = \frac{2}{3} P_2 - 11; \quad P_1 = 19$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_0} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow c_1 - \lambda + \lambda r (2p_1 - p_2) = \frac{1}{3} G$$

$$G = 3 + 3r(2p_1 - p_2) = 3 + 36r$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda r (2p_2 - p_1) + \frac{2}{3} G = 1 + 33r + \frac{2}{3} (3 + 36r)$$

$$= 3 + 57r$$

Вычисление p_0 : находим из общесистемного

баланса: $p_2 - p_0 - p_1 + \ell(p) = 0$

$$p_0 = p_2 - p_1 + \ell(p) \quad , \quad p_2 = 26, \quad p_1 = 19$$

$$\ell(p) = \frac{1}{2} [p_1 \ p_2] \nabla_p^2 \ell \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \sim 1.5$$